81

(1)

題意が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき

$$f^{(1)}(x)=\frac{(\log x)'x-\log x\cdot x'}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^{1+1}}$$ より，

$a_1=1,\ b_1=-1$ とすれば題意が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき題意が成り立つと仮定する

$$f^{(k)}(x)=\frac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$$ より，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}&=\frac{(a_k+b_k\log x)'x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)(x^{k+1})'}{(x^{k+1})^2}\\&=\frac{\dfrac{b_k}{x}\cdot x^{k+1}-(k+1)(a_k+b_k\log x)x^k}{x^{2k+2}}\\&=\frac{\{b_k-(k+1)a_k\}-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}\end{aligned}$$

よって，$a_{k+1}=b_k-(k+1)a_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とすれば題意が成り立つ。

(i)，(ii)より，

$a_1=1$，$b_1=-1$，$a_{k+1}=b_k-(k+1)a_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とすることにより

すべての自然数に対し題意が成り立つ。

また，以上より，

$a_1=1$，$a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n$

$b_1=-1$，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$

(2)

$b_{n+1}=-(n+1)b_n$ より，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=-(n+1)$

よって，$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_2}{b_1}=-n\cdot\{-(n-1)\}\cdot\cdots\cdot 2$ より，$\dfrac{b_n}{b_1}=(-1)^{n-1}n!$

これと $b_1=-1$ より，$b_n=(-1)^n n!$